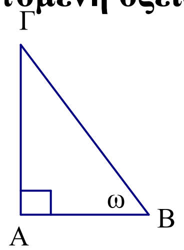
2.1 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

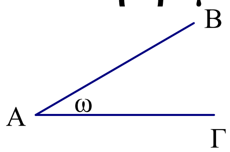
Εφαπτομένη οξείας γωνίας : Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και ω μία από τις οξείες γωνίες του. Ονομάζουμε εφαπτομένη της γωνίας ω και συμβολίζουμε με εφω το λόγο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά.



Δηλαδή $\text{εφω} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$

2.

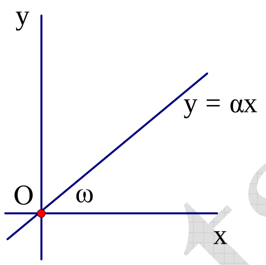
Κλίση δρόμου : Αν ΑΒ είναι ένας δρόμος και ΑΓ το οριζόντιο επίπεδο τότε την εφαπτομένη της γωνίας ω την ονομάζουμε κλίση του δρόμου



3.

Κλίση της ευθείας y = αx : Θυμίζουμε ότι ο λόγος $\alpha = \dfrac{y}{x}$ ονομάζεται κλίση της ευθείας y = αx και είναι $\alpha = \dfrac{y}{x} = \text{εφω}$

Δηλαδή η κλίση της ευθείας y = αx είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των x



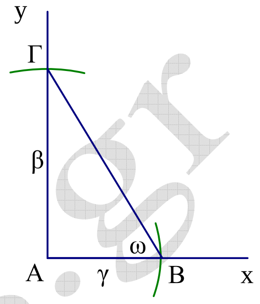
ΣΧΟΛΙΑ

1.

Προσδιορισμός της εφω : Για να βρούμε την εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας, ή χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικούς πίνακες, ή κομπιουτεράκι.

2.

Κατασκευή με τον χάρακα και τον διαβήτη γωνίας ω με δεδομένη εφαπτομένη



Έστω ότι εφω = $\dfrac{\beta}{\gamma}$.

Κατασκευάζουμε ορθή γωνία xAy.
Με κέντρο το A και ακτίνα γ γράφουμε κύκλο, που τέμνει την Ax στο B.
Με κέντρο το A και ακτίνα β γράφουμε κύκλο, που τέμνει την Ay στο Γ.
Φέρουμε τη ΒΓ. Τότε η ζητούμενη γωνία ω είναι η $A\hat{B}\Gamma$

αφού $\quad εφ\, A\hat{B}\Gamma = \dfrac{A\Gamma}{AB} = \dfrac{\beta}{\gamma}$

3.

Κλίση δρόμου σε ποσοστό % : Η έκφραση ο δρόμος έχει κλίση α % , σημαίνει ότι για κάθε 100m οριζόντιας απόστασης ο δρόμος ανεβαίνει ή κατεβαίνει α m.

Οπότε κλίση = εφω = $\dfrac{\alpha}{100}$ = 0,0α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) Αν θ οξεία τότε εφθ = 0
β) εφ45^o = 2
γ) Κλίση ενός δρόμου ονομάζεται η γωνία που σχηματίζει ο δρόμος με το οριζόντιο επίπεδο
δ) Η ευθεία y = 2x έχει κλίση 2
ε) Αν θ οξεία τότε πάντα η εφθ είναι δεκαδικός αριθμός

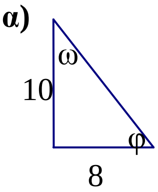
Προτεινόμενη λύση

α) Λάθος αφού για κάθε οξεία γωνία θ είναι εφθ > 0
β) Λάθος αφού εφ45^o = 1
γ) Λάθος αφού κλίση είναι η εφω
δ) Σωστό , όπως προκύπτει από την θεωρία
ε) Λάθος , μπορεί η εφθ να είναι και θετικός ακέραιος

2 .

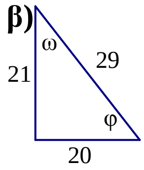
Στα παρακάτω σχήματα επιλέξτε την σωστή απάντηση

α)



Α . εφω > εφφ
Β. εφω = εφφ
Γ. εφω < εφφ
Δ. εφω = 6

β)



Α . $εφω = \frac{29}{21}$

Β . $εφφ = \frac{21}{20}$

Γ . $εφω = \frac{29}{20}$

Δ. $εφφ = \frac{20}{21}$

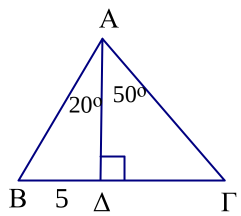
Προτεινόμενη λύση

α) Είναι $εφφ = \frac{10}{8}$ και $εφω = \frac{8}{10}$ και επειδή $\frac{10}{8} > \frac{8}{10}$, είναι εφφ > εφω

β) Ομοίως $εφφ = \frac{21}{20}$ άρα σωστό το Β

3.

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την απόσταση ΒΓ



Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 1

Στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι

$εφ20^o = \frac{ΒΔ}{ΑΔ}$ άρα $0,364 = \frac{5}{ΑΔ}$ οπότε $ΑΔ \cong 13,7$

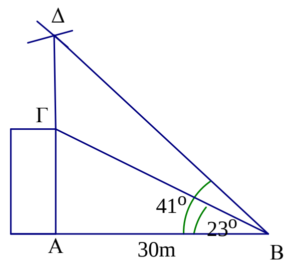
Στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε ότι

$εφ50^o = \frac{ΓΔ}{ΑΔ}$ άρα $1,1918 = \frac{ΓΔ}{13,7}$ οπότε $ΓΔ \cong 16,3$

Επομένως ΒΓ = 5 + 16,3 = 21,3 περίπου

4.

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το ύψος της κεραίας ΓΔ



Προτεινόμενη λύση

Στο τρίγωνο ΑΓΒ είναι $εφ23^o = \frac{ΑΓ}{30}$ άρα

$0,4245 = \frac{ΑΓ}{30}$ οπότε

ΑΓ = 12,7 m περίπου

Στο τρίγωνο ΑΔΒ είναι $εφ41^o = \frac{ΑΔ}{30}$ άρα

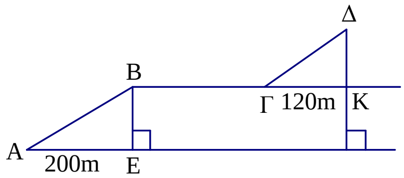
$0,8693 = \frac{ΑΔ}{30}$ οπότε

ΑΔ = 26 m περίπου

Το ύψος της κεραίας είναι ΔΓ = ΑΔ – ΑΓ = 26 – 12,7 = 13,3 m

5.

Στο διπλανό σχήμα η κλίση της μπάρας ΑΒ είναι 10 % και το σημείο Δ βρίσκετε 45 m ψηλότερα από το Α Να βρείτε την κλίση της μπάρας ΓΔ.



Σχόλιο 3

Προτεινόμενη λύση

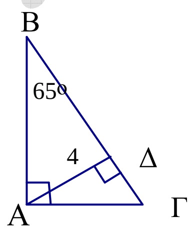
$\text{εφ}B\hat{A}E = \frac{BE}{200}$ άρα $0,1 = \frac{BE}{200}$ οπότε ΒΕ = 20 m

Αφού το Δ βρίσκεται 45 m ψηλότερα από το Α, είναι ΔΚ = 45– 20 = 25 m

Κλίση = $\text{εφ}\Delta\hat{\Gamma}K = \frac{\Delta K}{\Gamma K} = \frac{25}{120} = 0,2$ περίπου

6.

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος της υποτείνουσας ΒΓ.



Προτεινόμενη λύση

$\text{εφ}65^o = \frac{A\Delta}{B\Delta}$ άρα $2,1445 = \frac{4}{B\Delta}$ οπότε ΒΔ = 1,86 περίπου

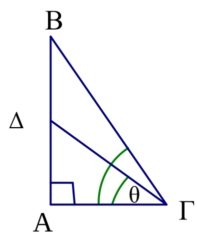
$\hat{\Gamma} = 90^o - 65^o = 25^o$ και

$\text{εφ}25^o = \frac{A\Delta}{\Gamma\Delta}$ άρα $0,4663 = \frac{4}{\Gamma\Delta}$ οπότε ΓΔ = 8,57 περίπου

συνεπώς ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ = 1,86 + 8,57 = 10,43

7.

Στο διπλανό σχήμα είναι εφΓ = 2εφθ. δείξτε ότι το Δ είναι μέσο του ΑΒ.



Προτεινόμενη λύση

Είναι $\text{εφ}\Gamma = \frac{AB}{A\Gamma}$ και $\text{εφ}\theta = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$

Η υπόθεση εφΓ = 2εφθ γίνεται $\frac{AB}{A\Gamma} = 2\frac{A\Delta}{A\Gamma}$ άρα

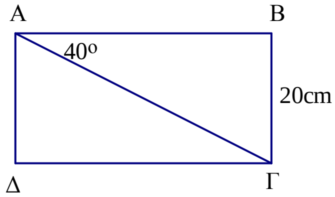
$AB = 2A\Delta$

$A\Delta = \frac{AB}{2}$

Πράγμα που σημαίνει ότι το Δ είναι μέσο του ΑΒ

8.

Στο διπλανό ορθογώνιο να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ .



Προτεινόμενη λύση

$εφ40^o = \dfrac{ΒΓ}{ΑΒ}$ άρα $0{,}8391 = \dfrac{20}{ΑΒ}$

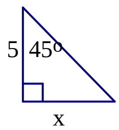
ΑΒ = 23,8 cm περίπου

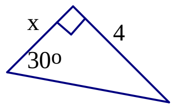
Η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι $Π = 2\cdot 20 + 2\cdot 23{,}8 = 40 + 47{,}6 = 87{,}6$ cm

Το εμβαδόν Ε είναι $Ε = 20\cdot 23{,}8 = 476\ cm^2$

9.

Στα παρακάτω σχήματα να βρείτε το μήκος x και τις υποτείνουσες των τριγώνων





Προτεινόμενη λύση

Στο πρώτο τρίγωνο, επειδή μία οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου είναι 45^o, αυτό είναι ισοσκελές. Άρα x = 5

Αν y είναι η υποτείνουσα, από το Πυθαγόρειο έχουμε ότι $y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 = 50$

$y = \sqrt{50} = 7{,}07$ περίπου

Στο δεύτερο τρίγωνο, είναι $εφ30^o = \dfrac{4}{x}$ άρα $0{,}5774 = \dfrac{4}{x}$

x = 6,9 περίπου

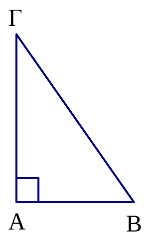
και για την υποτείνουσα z, $z^2 = x^2 + 4^2 = 6{,}9^2 + 4^2 = 63{,}61$

$z = \sqrt{63{,}61} = 7{,}97$ περίπου

10.

Στο διπλανό σχήμα είναι $εφΓ = \dfrac{4}{3}$ και ΑΒ = 18 m .

Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου.



Προτεινόμενη λύση

$εφΓ = \dfrac{ΑΒ}{ΑΓ}$ άρα $\dfrac{4}{3} = \dfrac{18}{ΑΓ}$ οπότε ΑΓ = 13,5 m

Από Πυθαγόρειο έχουμε $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 =$

$= 18^2 + 13{,}5^2 =$

$= 324 + 182{,}25 =$

$= 506{,}25$

Οπότε $ΒΓ = \sqrt{506{,}25} = 22{,}5$ m

Περίμετρος = ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ = 18 + 22,5 + 13,5 = 54 m

Το εμβαδόν Ε είναι $Ε = \dfrac{ΑΒ\cdot ΑΓ}{2} = \dfrac{18\cdot 13{,}5}{2} = 121{,}5\ m^2$